ANDERS FLORÉN · PHILIPPE JEANJACQUOT · DIONYSIS KONSTANTINOU · ANDREAS MEIER · CORINA TOMA · ZBIGNIEW TRZMIEL

FÍSICA CON EFECTO

Efecto Magnus, dinámica de fluidos
física, matemáticas
16–19 años

1 | SUMARIO

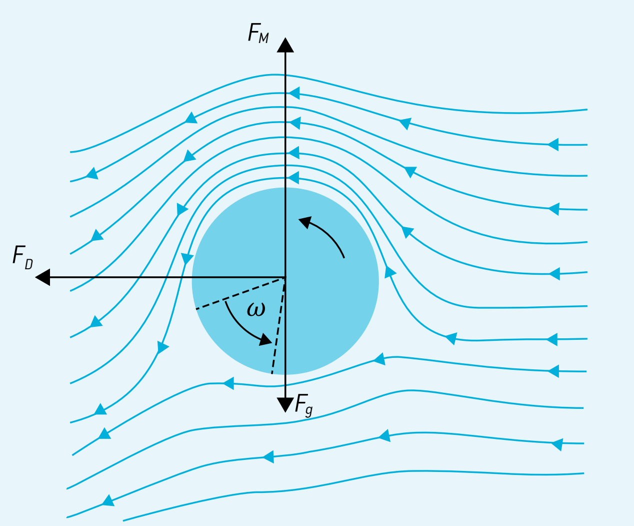
Una pelota en rotación desplazándose por el aire curvará su trayectoria debido al efecto Magnus, una fuerza que actúa en perpendicular a la dirección y al eje de rotación de la pelota. Aquí presentamos algunos experimentos prácticos, simulaciones y métodos para calcular la trayectoria.

2 | INTRODUCCIÓN DE CONCEPTOS

En junio de 1997, Roberto Carlos marcó un sorprendente gol de libre directo desde 35 metros que aún hoy sigue desconcertando a todo el que lo ve. [1] ¿Cómo puede comportarse así el balón, yendo en una dirección para luego curvar su trayectoria hacia la portería como por arte de magia? La respuesta es que el balón, al girar en el aire, está sometido a la fuerza del efecto Magnus. Si quieres ver una introducción sobre tiros libres a cargo del mismísimo maestro Roberto Carlos, recomendamos este vídeo de la web de UEFA Training Ground. [2] Para ver una introducción sobre el efecto Magnus, sigue leyendo.

Para analizar la trayectoria de un balón, necesitamos evaluar las tres fuerzas que actúan sobre él: la gravedad F_g, el efecto Magnus F_M y la resistencia aerodinámica F_D.

FIG. 1 Fuerzas [3]



La fuerza de la gravedad viene determinada simplemente por la segunda ley de Newton, $F_g = mg$, siendo m la masa del balón y g la aceleración gravitacional.

El efecto Magnus F_M se produce por la diferencia de presión en los lados opuestos del balón. Los cambios en la presión se pueden describir mediante el principio de Bernoulli. Para un punto que se desplaza por una superficie con una velocidad v, la presión total p es igual a la presión estática circundante p_0 más la presión dinámica q (**ECUACIÓN 1**), siendo ρ la densidad del medio, en nuestro caso la densidad del aire. Pero cuando un balón o un cilindro R presenta un movimiento de rotación (con una velocidad angular de ω en radianes por segundo), un punto en la superficie de un lado del balón está sometido a un mayor flujo de aire $(v + \omega R)$ que el punto opuesto del otro lado $(v - \omega R)$. Así pues, podemos deducir la diferencia de presión $\Delta p = 2\rho\omega vR$ con la **ECUACIÓN 1**.

$$p = q + p_0 = \frac{\rho v^2}{2} + p_0 \qquad \textbf{(ECUACIÓN 1)}$$

$$\Delta p = \left(\frac{\rho v_2{}^2}{2} + p_0\right) - \left(\frac{\rho v_1{}^2}{2} + p_0\right)$$

$$= \frac{\rho\left((v+\omega R)^2 - (v-\omega R)^2\right)}{2} = 2\,\rho\omega vR$$

$$F_M = \Delta pA = (2\rho\omega vR)A$$

Para un cilindro: $F_M = 4\rho\omega vR^2h.$ **(ECUACIÓN 2)**

Para una esfera: $F_M = 2\rho\omega v\pi R^3.$ **(ECUACIÓN 3)**

La presión que actúa en la superficie será F_M. Sin profundizar demasiado en la parte matemática de este fenómeno, solo necesitamos determinar las fuerzas que actúan en perpendicular al flujo del fluido. Cualquier fuerza que actúe en una dirección que no sea la perpendicular al flujo será anulada por otra fuerza opuesta debido a la simetría. Así pues, solo tenemos en cuenta el área de cruce efectiva A del objeto. Para un balón, A será simplemente un círculo con un radio R (utilizado en la **ECUACIÓN 3**); para un cilindro, A será un rectángulo con una altura $2R$ y una anchura h (utilizado en la **ECUACIÓN 2**). En términos de vectores, $\vec{F}_M$ es proporcional al producto vectorial de la velocidad direccional y la velocidad angular.

Finalmente, debemos evaluar la resistencia aerodinámica F_D. La resistencia es complicada, pues el flujo de aire puede ser laminar o turbulento, dependiendo en gran medida de la forma del objeto y de la naturaleza del fluido en el que se desplace. Para nuestros experimentos, basta con suponer que el flujo es laminar (como en la **FIG. 1**) y utilizar la ecuación de resistencia estándar, en la que la fuerza va dirigida en la dirección opuesta v y de forma proporcional a la velocidad: $F_D = \beta v$. β es una constante que depende de las propiedades del fluido y las dimensiones del objeto; para un balón de fútbol en el aire, es $\beta = 0{,}142\,\frac{\text{kg}}{\text{s}}$ [4].

3 | QUÉ HACEN LOS ALUMNOS

Aquí presentamos tres opciones diferentes para demostrar el efecto Magnus. Todos estos experimentos se pueden realizar como demostraciones simples, pero también se pueden grabar los experimentos y utilizar nuestros modelos para analizar las trayectorias. En ese caso, se debe grabar con una cámara fija a la misma altura que los objetos y en perpendicular a la trayectoria, y al menos a unos metros de distancia para minimizar la distorsión angular. El vídeo se puede analizar después con un programa de seguimiento del movimiento. Para ello recomendamos el software

FIG 2 Cilindro en una pendiente

Tracker[5]. Encontrará instrucciones detalladas sobre cómo utilizar Tracker en nuestro primer libro de iStage[6]. También hay una app excelente llamada VidAnalysis[7] que graba la trayectoria y realiza el análisis directamente en un dispositivo Android **(FIG. 2C)**. Los datos también se pueden exportar para analizarlos más exhaustivamente; para ello utilizamos el software gratuito GeoGebra[8].

3 | 1 Experimentos con cilindros

Se hacen diferentes cilindros con hojas de papel de tamaño A4 o A3 y pegamento. Se coloca un tablero inclinado y se dejan caer los cilindros rodando por la pendiente para obtener así una caída libre con rotación **(FIG. 2A)**.

Los alumnos pueden examinar qué ocurre si cambian la inclinación de la pendiente, o bien el radio o la altura del cilindro. Así,

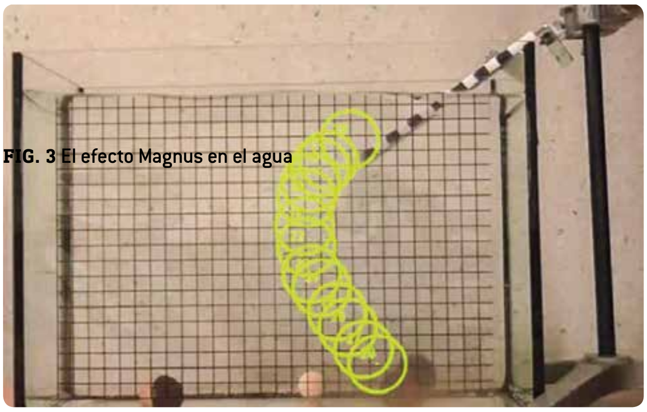


FIG. 3 El efecto Magnus en el agua

los alumnos pueden determinar de forma experimental los parámetros que provocarán un mayor efecto a simple vista, y relacionarlo con la **ECUACIÓN 2**, o pueden llegar aún más lejos, extrayendo los datos y llevando a cabo un análisis de dichos datos (Modelo II) tal como se describe más adelante.

El efecto Magnus en el agua **(FIG. 3)** es aún más espectacular por la mayor densidad del medio. El cilindro debe tener una mayor densidad que el agua, y una superficie rugosa para aumentar la fricción. Nosotros utilizamos una varilla maciza de Teflon con Velcro pegado a la superficie. Para ajustar el peso del cilindro, pueden pegarse monedas en los extremos del mismo.

Una preparación aún más espectacular, aunque más complicada, es pegar entre sí, con pegamento o cinta adhesiva, las bases de dos vasos de poliestireno, obteniéndose así un cilindro con una cintura en el medio.[9] Se enrolla una cuerda alrededor de la cintura y se lanza el cilindro al aire tirando bruscamente de la cuerda (**FIG. 4**; también hay un enlace a un vídeo en nuestra página de GeoGebra[10]). Se requiere un poco de práctica, pero el resultado es espectacular. Este experimento es menos reproducible que otros experimentos con cilindros, pues la trayectoria dependerá del ángulo y de la fuerza con que se tire bruscamente de la cuerda. No obstante, las trayectorias de los intentos con éxito se pueden analizar individualmente. En la **FIG. 4**, los vasos voladores realizan un movimiento circular. Si el efecto Magnus es considerablemente mayor que la fuerza de la gravedad, F_M se comportará como una fuerza centrípeta. Esta suposición resulta muy útil, y se utilizará más adelante en el análisis de datos.

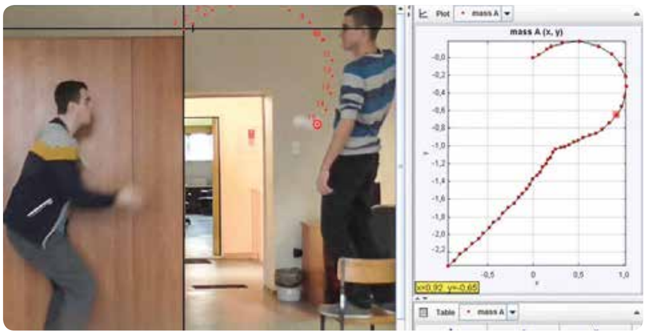


FIG. 4 Vasos voladores

3 | 2 Análisis de datos

Hemos desarrollado diferentes modelos matemáticos para analizar las trayectorias. Estos modelos están accesibles directamente en Internet en nuestra página de iStage 3 GeoGebra[10]. Recomendamos abrirlos antes de seguir leyendo este texto. Se abren directamente en su navegador; solo hay que hacer clic en el enlace.

En todos los cálculos hemos supuesto que la rotación es constante durante el vuelo. A continuación hemos creado dos modelos simplificados basados en diferentes suposiciones:

Modelo I: Como en la trayectoria en forma de signo de interrogación con los vasos voladores de papel **(FIG. 4)**, F_M se comportará como una fuerza centrípeta, y la trayectoria calculada del objeto será un círculo con el radio r. Esta suposición también es bastante razonable en una situación de lanzamiento de penalti, donde la velocidad del balón se mantiene aproximadamente igual. Parte de la energía se pierde por la turbulencia, de modo que necesitamos introducir una constante C_s para describir esta pérdida.

Así pues, tenemos:

$$F_M = C_s 2\rho\omega vRA = \frac{mv^2}{r}.$$

Para una esfera: $r = \dfrac{mv}{2C_s\pi\rho\omega R^3}$. **(ECUACIÓN 4)**

Para un cilindro: $r = \dfrac{mv}{4C_s\rho\omega hR^2}$. **(ECUACIÓN 5)**

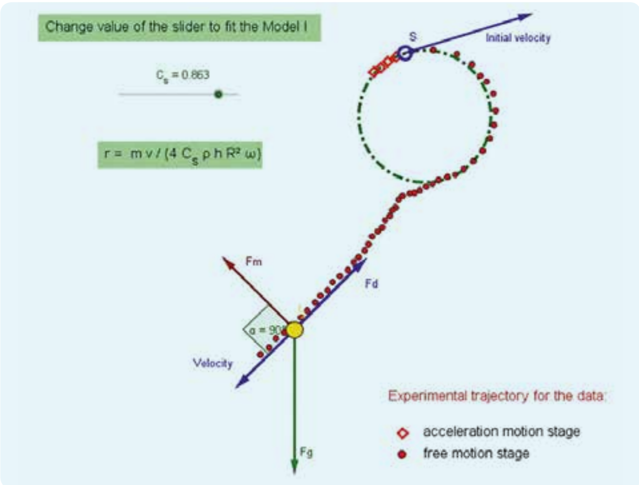


FIG. 5 Análisis de los vasos voladores

Puede verse el trazado de la **FIG. 4** en nuestro modelo de GeoGebra (vasos voladores) y modificarse el centro del círculo y C_s. Es posible jugar con los parámetros para conseguir el mejor ajuste; el modelo calculará r a partir de la **ECUACIÓN 5**. Para nuestros datos, el mejor ajuste es $C_s = 0{,}86$.

Modelo II: A fin de simplificar los cálculos para el experimento con el cilindro de papel **(FIG. 2)**, los alumnos pueden suponer que el efecto Magnus ejerce una fuerza principalmente perpendicular a la dirección inicial del movimiento, y que los cilindros han alcanzado su velocidad máxima cuando caen. Con estas suposiciones, F_D y F_g se anulan, y el efecto Magnus se puede considerar como una aceleración a en la dirección y, de modo que la trayectoria calculada será una curva parabólica:

$$y = \frac{a}{2v^2}x^2 \implies y = C_s\frac{\rho\omega RA}{mv}x^2.$$

Para una esfera: $y = C_s\dfrac{\pi\rho\omega R^3}{mv}x^2$. **(ECUACIÓN 6)**

Para un cilindro: $y = C_s\dfrac{2\rho\omega hR^2}{mv}x^2$. **(ECUACIÓN 7)**

Esto es una simplificación, pero nos dará un valor de C_s similar al de nuestro otro modelo.

En nuestra página de GeoGebra **(FIG. 6)** hemos hecho una recreación del famoso gol de libre directo de Roberto Carlos. Es posible jugar con casi todos los parámetros para modificar el montaje (distancia, ángulo, tamaño de la portería, C_s, velocidad, rotación, posición de la barrera de cuatro jugadores, etc.). El análisis mostrará la trayectoria calculada de los dos modelos I y II, esta vez utilizando la **ECUACIÓN 4** y la **ECUACIÓN 6** porque estamos observando un balón en lugar de un cilindro. Proponemos retar a los alumnos a que encuentren los mejores valores para un montaje determinado, o pedirles que encuentren las condiciones en las que los modelos den diferentes trayectorias, y que expliquen por

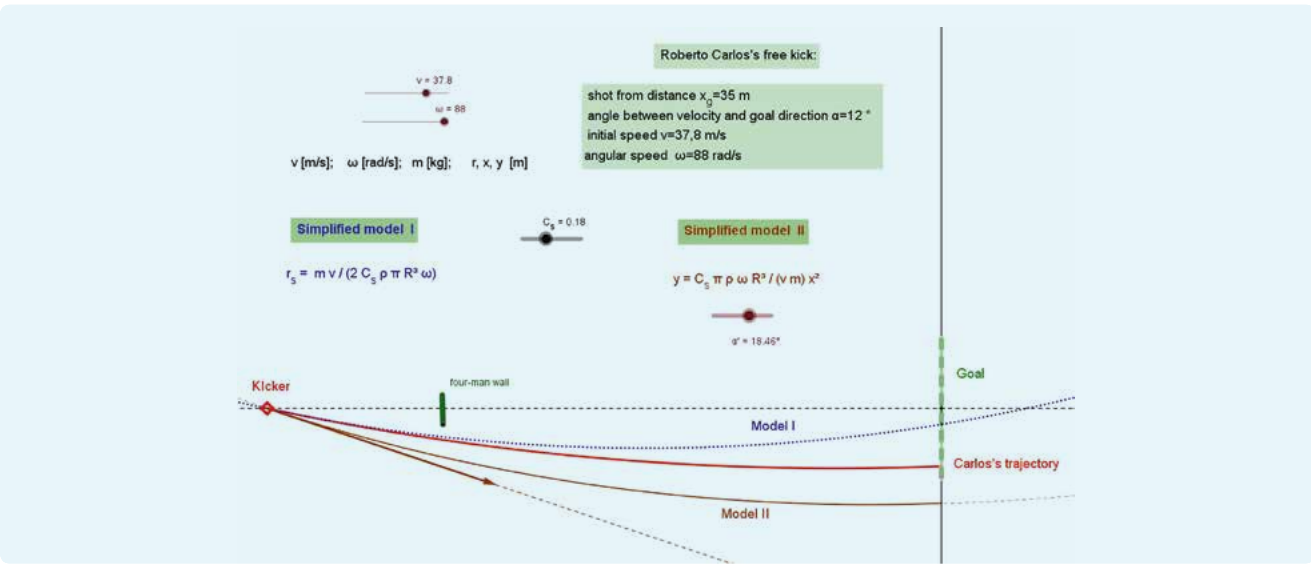


FIG. 6 Análisis del libre directo

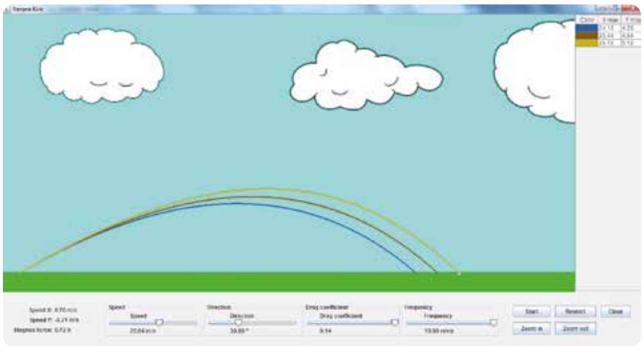


FIG. 7 Simulación en 2D (de Cristian Militaru)

qué. (Se descubrirá que los modelos difieren cuando al balón se le imprime una velocidad muy baja y una rotación muy elevada).

3 | 3 Simulaciones

Simulación en 2D: Tras realizar varios experimentos ellos mismos, los alumnos podrán simular el efecto Magnus. Para ello se debe descargar el programa Java [11]. En esta simulación, los alumnos pueden modificar la velocidad inicial, el ángulo, el coeficiente de resistencia y la frecuencia angular. La dirección de rotación y las fuerzas que actúan sobre el balón se muestran en la **FIG. 1**. En la **FIG. 7** se muestran tres ejemplos de trayectorias a 30° con una frecuencia de 0, después de 5 y finalmente de $10\frac{rev}{s}$. En esta figura puede verse que los valores de x_{max} e y_{max} aumentan si se aumenta también la frecuencia.

Simulación en 3D: Una vez más hemos recreado la trayectoria del libre directo de Roberto Carlos (**FIG. 8**). Ahora pueden intentar hacerlo los propios alumnos descargándose el programa Java correspondiente [11]. Más adelante se puede probar con una versión diferente [11] sin el disparo, pero se pueden cambiar los parámetros libremente para ver qué influencia tendrán en la trayectoria.

En 3D, las cosas en seguida se vuelven más complejas. En el modelo bidimensional, el balón solo puede tener giro hacia arriba o hacia abajo, de modo que la trayectoria y el efecto Magnus siempre actuarán en el mismo plano. En el modelo tridimensional, el efecto Magnus curvará la trayectoria del balón, pero el impulso angular del giro se conservará siempre, pues el balón se comporta como un giroscopio. Así pues, el ángulo entre v y ω será diferente en los distintos puntos de la trayectoria, lo cual dará al balón una trayectoria más compleja. A diferencia de los cálculos en GeoGebra, este programa simplemente calcula todas las fuerzas numéricamente en cada fotograma basándose en los valores del fotograma anterior. El programa está escrito en Processing [12], una versión simplificada de Java.

4 | CONCLUSIÓN

En un campo de fútbol, la trayectoria del balón es compleja y depende de un gran número de factores. Para estudiarlos en clase, los alumnos tienen que dividirlos en componentes manejables con la ayuda de modelos y simplificaciones. Estos experimentos, modelos y simulaciones nos ofrecen una visión de a qué conclusiones podemos llegar trabajando con un método científico. Y suponiendo

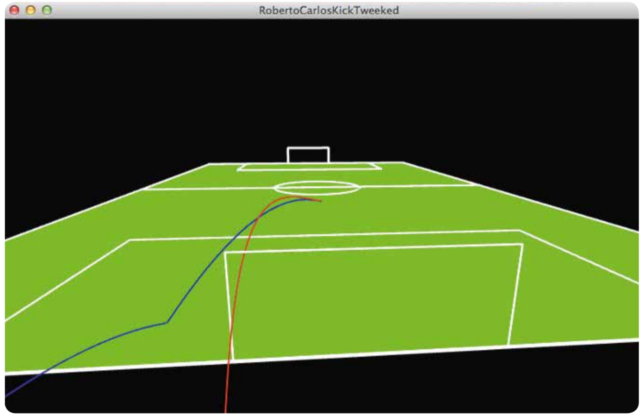


FIG. 8 Simulación en 3D

que el partido se jugara bajo el agua, o que el balón se pudiera sustituir por dos vasos de papel, nos acercaríamos mucho a la explicación de cómo consigue Roberto Carlos imprimirle esa curva al balón.

5 | OPCIONES DE COOPERACIÓN

En nuestra plataforma iStage 3 GeoGebra [10] encontrará información sobre cómo obtener una copia de nuestros archivos de GeoGebra y cómo utilizarlos. Proponemos un reto: conseguir el máximo efecto Magnus posible para el experimento de los vasos de papel voladores. Esto equivale a encontrar el valor más alto para C_s, lo más cercano posible a 1. También puede compartir sus análisis, resultados y modelos [11].

REFERENCIAS:

[1] www.theguardian.com/football/2015/may/18/roberto-carloss-free-kick-against-france-recreated-sensible-soccer-style (08/03/2016)

[2] www.uefa.com/trainingground/skills/video/videoid%3D761187.html (08/03/2016)

[3] La imagen original de la **FIG. 1** ha sido obtenida de https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Magnus_effect.svg (08/03/2016)

[4] The Science of Soccer; John Wesson. CRC press, 2002. ISBN 978-0750308137

[5] www.physlets.org/tracker

[6] iStage: Teaching Materials for ICT in Natural Sciences (materiales para la enseñanza de TIC en ciencias naturales), sección “From Bicycle to Space” (de la bicicleta al espacio), págs. 45-52; www.science-on-stage.de/iStage1_downloads

[7] Aplicación VidAnalysis https://play.google.com/store/apps/details?id=com.vidanalysis.free&hl=en (08/03/2016)

[8] www.geogebra.org/

[9] Laura Howes describe un experimento parecido (Science in School, tema 35, 2016, www.scienceinschool.org/content/sports-spin).

[10] www.geogebra.org/science+on+stage

[11] www.science-on-stage.de/iStage3_materials

[12] https://processing.org

IMPRINT

TAKEN FROM
iStage 3 - Football in Science Teaching
available in Czech, English, French, German,
Hungarian, Polish, Spanish, Swedish
www.science-on-stage.eu/istage3

PUBLISHED BY
Science on Stage Deutschland e.V.
Poststraße 4/5
10178 Berlin · Germany

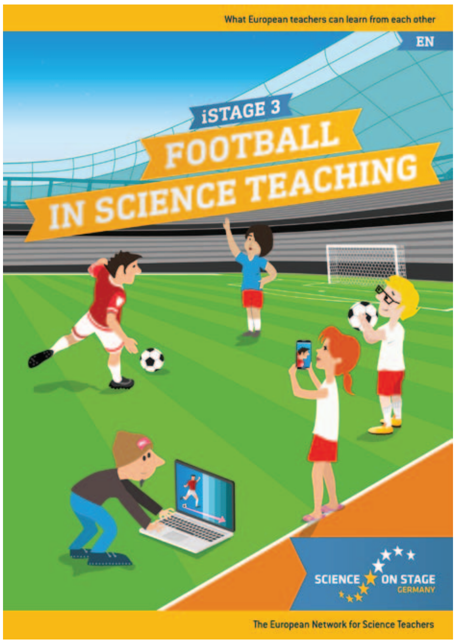
REVISION AND TRANSLATION
TransForm Gesellschaft für Sprachen- und Mediendienste mbH
www.transformcologne.de

CREDITS
The authors have checked all aspects of copyright for the images and texts used in this publication to the best of their knowledge.

DESIGN
WEBERSUPIRAN.berlin

ILLUSTRATION
Tricom Kommunikation und Verlag GmbH
www.tricom-agentur.de

PLEASE ORDER FROM
www.science-on-stage.de
info@science-on-stage.de



SCIENCE ON STAGE – THE EUROPEAN NETWORK FOR SCIENCE TEACHERS

... is a network of and for science, technology, engineering and mathematics (STEM) teachers of all school levels.
... provides a European platform for the exchange of teaching ideas.
... highlights the importance of science and technology in schools and among the public.

The main supporter of Science on Stage is the Federation of German Employers' Associations in the Metal and Electrical Engineering Industries (GESAMTMETALL) with its initiative think ING.

Join in - find your country on
WWW.SCIENCE-ON-STAGE.EU
www.facebook.com/scienceonstageeurope
www.twitter.com/ScienceOnStage

Subscribe for our newsletter:
www.science-on-stage.eu/newsletter

SCIENCE ON STAGE GERMANY

MAIN SUPPORTER OF SCIENCE ON STAGE GERMANY
think ING.
Die Initiative für Ingenieurnachwuchs

Proudly supported by
SAP