ANDERS FLORÉN · PHILIPPE JEANJACQUOT · DIONYSIS KONSTANTINOU · ANDREAS MEIER · CORINA TOMA · ZBIGNIEW TRZMIEL

CSAVAROS FIZIKA

Magnus-effektus, folyadékdinamika
fizika, matematika
16–19 év

1 | ÖSSZEFOGLALÓ

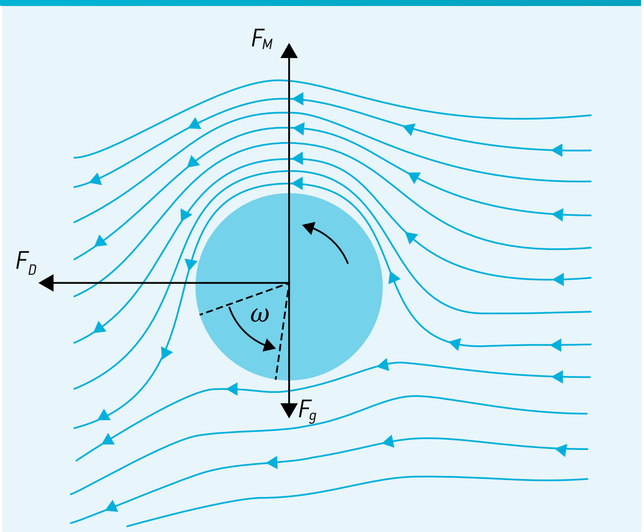
A levegőben mozgó forgó labda pályáját módosítja a Magnus-effektus, a labda mozgási irányára és forgástengelyére merőlegesen ható erő. Ebben a tanegységben kísérletekkel, szimulációkkal és egyéb módszerekkel számítjuk ki az eredő röppályát.

2 | ELMÉLETI BEVEZETŐ

Roberto Carlos 1997 júniusában 35 méteres szabadrúgásból olyan gólt szerzett, amely máig zavarba ejti a nézőt.[1] Miként lehetséges, hogy a labda elindul az egyik irányba, majd – mintegy varázsütésre – a kapu felé kanyarodik? A válasz: a levegőben forgó labdára a Magnus-effektus hat. Ha magától Roberto mestertől szeretnénk leckét venni a szabadrúgás művészetében, semmiképpen ne hagyjuk ki ezt a videót az UEFA Training Ground honlapján.[2] Ha a Magnus-effektusról szeretnénk többet megtudni, folytassuk az olvasást.

A labda röppályájának elemzéséhez meg kell vizsgálnunk a labdára ható három különböző erőt: a gravitációt (F_g), a Magnus-erőt (F_M) és a közegellenállási erőt (F_D).

1. ÁBRA Erők[3]



A gravitációs erő egyszerűen fejezhető ki: $F_g = mg$, ahol m a labda tömege, g pedig a nehézségi gyorsulás.

Az F_M Magnus-erő a labda ellenkező oldalain fennálló nyomáskülönbségek miatt lép fel. A nyomásváltozások a Bernoulli-elvvel írhatók le. A közegben v sebességgel haladó felület adott pontján a teljes nyomás (p) egyenlő a környezeti statikus nyomás (p_0) és a dinamikus nyomás (q) összegével (**1. EGYENLET**), ahol ρ a közeg – vagyis esetünkben a levegő – sűrűsége. Azonban ha egy R sugarú gömb vagy henger forog is (ω szögsebességgel, radián/mp mértékegységben kifejezve), akkor a tárgy egyik oldalán lévő adott pontnál magasabb a légáramlás sebessége ($v + \omega R$), mint az ellenkező oldalon ($v - \omega R$). A nyomáskülönbség ($\Delta p = 2\rho\omega vR$) az **1. EGYENLET** alapján számítható ki.

$$p = q + p_0 = \frac{\rho v^2}{2} + p_0 \qquad \textbf{(1. EGYENLET)}$$

$$\Delta p = \left(\frac{\rho {v_2}^2}{2} + p_0\right) - \left(\frac{\rho {v_1}^2}{2} + p_0\right)$$

$$= \frac{\rho\left((v+\omega R)^2 - (v-\omega R)^2\right)}{2} = 2\,\rho\omega vR$$

$$F_M = \Delta p A = (2\rho\omega vR)A$$

Henger esetében: $F_M = 4\rho\omega vR^2h.$ **(2. EGYENLET)**

Gömb esetében: $F_M = 2\rho\omega v\pi R^3.$ **(3. EGYENLET)**

Az F_M értéke a felületre ható nyomás lesz. A matematikai levezetést nem kell részletesen tárgyalni: elegendő, ha az áramlásra merőlegesen ható erőket vizsgáljuk. Az áramlásra merőlegestől eltérő irányban ható erőket a szimmetria miatt mindig kiegyenlíti egy velük ellentétes irányba ható erő. Ezért csak a tárgy A keresztmetszetét kell vizsgálnunk. Labda esetében az A egyszerűen egy R sugarú kör (lásd a **3. EGYENLETET**); henger esetében az A egy $2R$ magasságú és h szélességű téglalap (lásd a **2. EGYENLETET**). Vektorokkal kifejezve: az $\vec{F}_M$ a haladási sebesség és a szögsebesség vektoriális szorzatával (keresztszorzatával) arányos.

Végül figyelembe kell vennünk az F_D közegellenállási erőt is. A közegellenállás bonyolult, mivel a légáramlás lehet lamináris vagy turbulens is, ami nagyrészt a tárgy alakjától és a közeg jellegétől függ. Kísérleteinkhez elegendő azt feltételezni, hogy az áramlás lamináris (lásd az **1. ÁBRÁT**), így használhatjuk a közegellenállás szokásos egyenletét, ahol az erő a v sebességgel ellenkező irányban hat, nagysága pedig a sebességgel arányos: $F_D = \beta v$. A β olyan állandó, amely a közeg tulajdonságaitól és a tárgy méretétől függ; egy levegőben haladó focilabda esetében $\beta = 0{,}142\,\frac{\text{kg}}{\text{s}}$ [4].

3 | A TANULÓK TEVÉKENYSÉGE

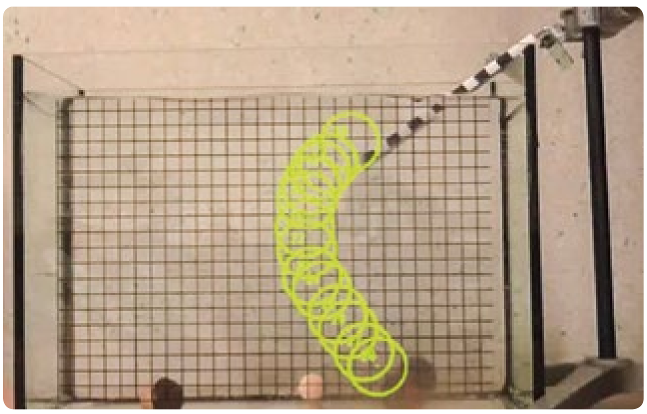
A Magnus-effektus három különféle bemutatási módját ismertetjük. A kísérletek mindegyike elvégezhető egyszerű bemutatóként, de videóra is rögzíthető, és a modellek használatával elemezhető a labda röppályája. A videofelvételt rögzített kamerával végezzük, amelyet a vizsgálandó tárggyal azonos magasságban, a röppályára merőlegesen helyezzünk el, legalább néhány méteres távolságra attól, hogy minimális legyen a perspektivikus torzítás. A felvételt mozgáselemző szoftverrel lehet analizálni. Ehhez a Tracker[5] programot javasoljuk. A Tracker használatáról az első iStage kiadványban[6] találhatók részletes információk. A röppálya a nagyszerű VidAnalysis[7] alkalmazással is rögzíthető, majd az elemzés közvetlenül elvégezhető Android-eszközön (**2C. ÁBRA**). Az adatok exportálhatók is további elemzés céljából; itt az ingyenes GeoGebra[8] szoftvert használjuk.

2. ÁBRA Lejtőn guruló henger

3 | 1 Kísérletek hengerekkel

Készítsünk különböző hengereket A4-es vagy A3-as lapokból, ragasztó használatával. Állítsunk fel egy lejtős pályát, és gurítsuk le a hengereket a pályán, hogy tanulmányozhassuk a forgó szabadesést **(2A. ÁBRA)**.

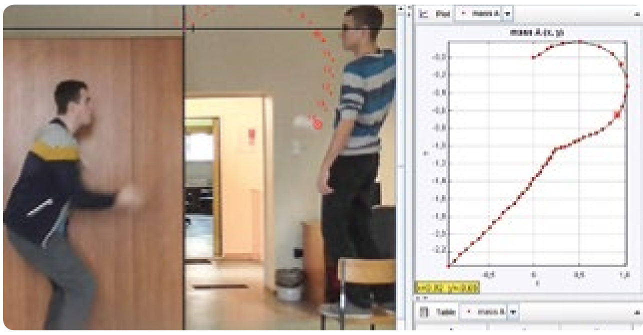
A tanulók megvizsgálhatják, mi történik, ha módosítják a lejtő dőlésszögét, illetve a henger sugarát vagy magasságát. Kísérletileg meghatározhatjuk azokat a paramétereket, amelyek szemmel láthatóan nagy hatást gyakorolnak a mozgásra, majd a **2. EGYENLET** alapján elemezhetjük az adatokat. Arra is lehetőség van, hogy a kinyert adatok alapján adatelemzést végzünk (II. modell) a későbbiekben leírtak szerint.



3. ÁBRA A Magnus-effektus vízben

A Magnus-effektus vízben **(3. ÁBRA)** a közeg nagyobb sűrűsége miatt még látványosabb. A hengernek a víznél sűrűbbnek kell lennie, a súrlódás növeléséhez pedig érdes felületet kell alkalmazni. A példánkban tömör teflonrudat használtunk, a felületre pedig tépőzárat ragasztottunk. A henger súlyát módosíthatjuk úgy, hogy érméket ragasztunk a két végére.

Még látványosabb – bár nehezebben kivitelezhető – elrendezéshez jutunk, ha összeragasztjuk két műanyag csésze alját, így olyan hengert kapunk, amely középen elvékonyodik.[9] Tekerjünk madzagot az elvékonyodó részre, majd a madzag megrántásával engedjük el a hengert (**4. ÁBRA**; lásd még a GeoGebra-oldalunkon lévő videóra mutató hivatkozást[10]). A mozdulat némi gyakorlást igényel, de az eredmény nagyon látványos. A többi hengeres kísérlethez képest ez a kísérlet kevésbé reprodukálható, mivel a röppálya a szögtől és attól is függ, milyen erősen rántjuk meg a madzagot. A sikeres kísérletek azonban egyedileg elemezhetők. A **4. ÁBRÁN** a repülő csészék körkörös mozgást végeznek. Ha a Magnus-effektus jelentősen erősebb, mint a gravitációs erő, akkor az F_M centripetális erőként viselkedik. Ezt a hasznos meglátást később, az adatelemzés során is felhasználjuk majd.



4. ÁBRA Repülő csészék

3 | 2 Adatelemzés

A röppályák elemzéséhez különböző matematikai modelleket dolgoztunk ki. Ezek a modellek közvetlenül elérhetők iStage 3 GeoGebra-oldalunkról[10]. Megtekintésük mindenképpen javasolt a folytatás előtt. A modellek közvetlenül a böngészőből futtathatók – csak a hivatkozásra kell kattintani.

A számítások mindegyikében feltételeztük, hogy a forgás állandó a mozgás során. Ezután két egyszerűsített modellt hozunk létre különböző feltételezések alapján:

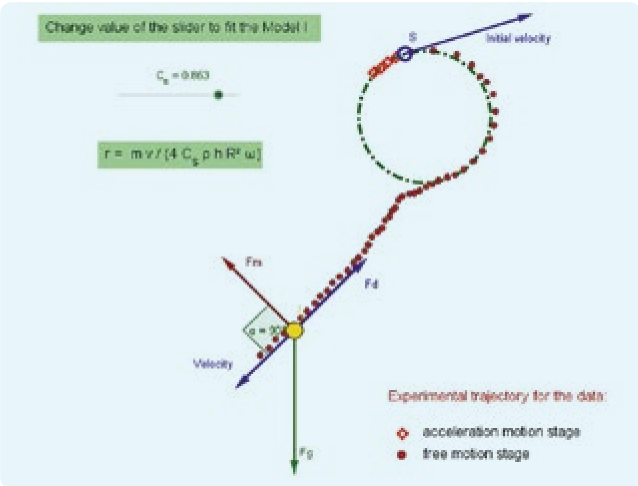
I. modell: Akárcsak a repülő papírcsészék kérdőjel alakú röppályája esetében **(4. ÁBRA)**, az F_M centripetális erőként viselkedik, a tárgy kiszámított röppályája pedig r sugarú kör lesz. Ez a feltételezés a tizenegyesrúgás vizsgálatakor is ésszerű, mivel a labda teljes sebessége nagyjából állandó marad. A turbulencia miatt elvész az energia egy része, ezért a veszteség leírásához be kell vezetnünk a C_s állandót.

Így:

$$F_M = C_s 2\rho\omega vRA = \frac{mv^2}{r}.$$

Gömb esetében: $r = \dfrac{mv}{2C_s \pi\rho\omega R^3}$. **(4. EGYENLET)**

Henger esetében: $r = \dfrac{mv}{4C_s \rho\omega h R^2}$. **(5. EGYENLET)**



5. ÁBRA Repülő csészék mozgásának elemzése

A **4. ÁBRÁN** látható a GeoGebra-modell pályája (repülő csészék), és módosítható a kör középpontja, valamint a C_s. A paraméterek módosításával próbáljuk elérni a legjobb illeszkedést; a modell az r értékét az **5. EGYENLETBŐL** számítja ki. Adataink esetében a legjobb illeszkedést $C_s = 0{,}86$ adja.

II. modell: A papírhengerrel végzett kísérlet számításainak leegyszerűsítése **(2. ÁBRA)** érdekében a tanulók feltételezhetik, hogy a Magnus-effektus főként a kezdeti mozgásirányra merőlegesen hat, a hengerek pedig eséskor elérték a maximális sebességüket. Ezekkel a feltételezésekkel élve az F_D és az F_g kiegyenlítik egymást, a Magnus-effektus pedig gyorsulásként (a) értelmezhető az y irányban, így a kiszámított röppálya parabola lesz:

$$y = \frac{a}{2v^2}x^2 \implies y = C_s \frac{\rho\omega RA}{mv}x^2.$$

Gömb esetében: $y = C_s \dfrac{\pi\rho\omega R^3}{mv}x^2$. **(6. EGYENLET)**

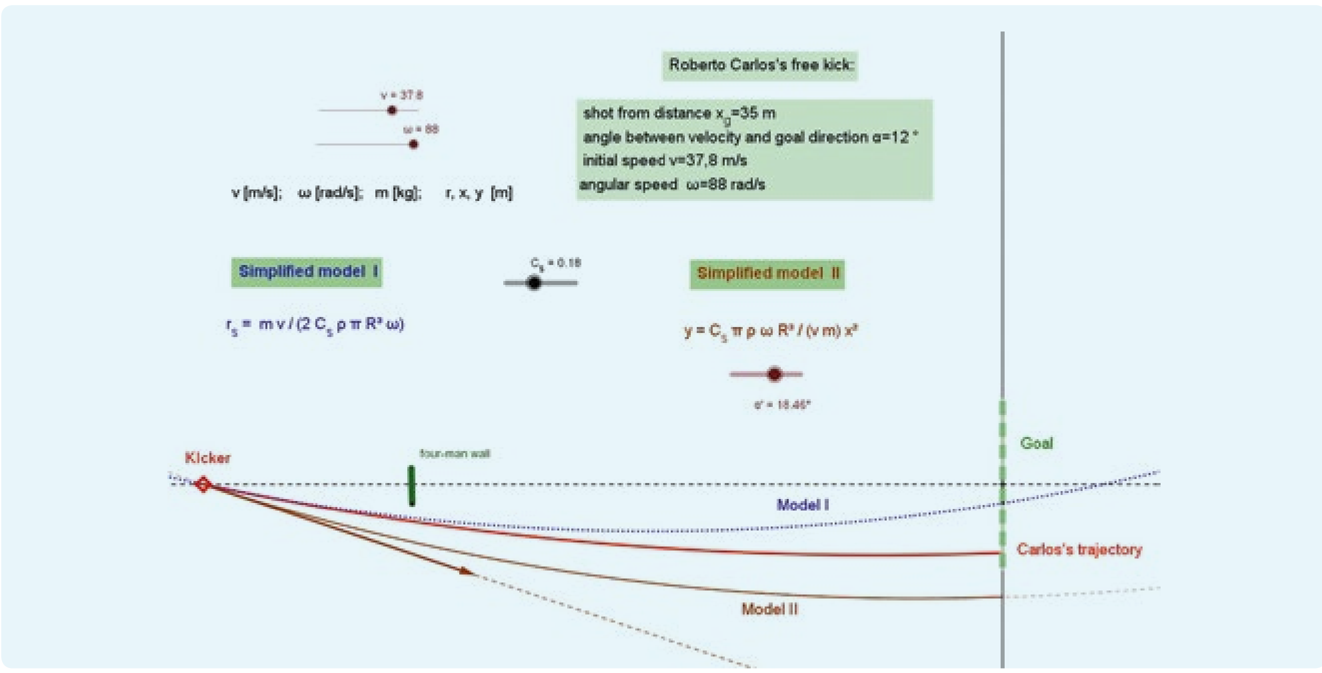
Henger esetében: $y = C_s \dfrac{2\rho\omega h R^2}{mv}x^2$. **(7. EGYENLET)**

Ez leegyszerűsítés ugyan, de hasonló C_s értéket ad, mint a másik modell.

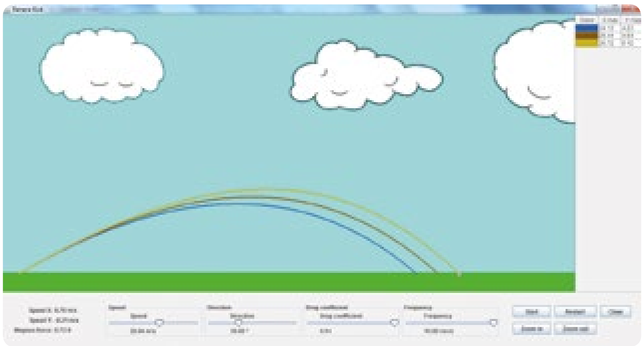
GeoGebra-oldalunkon **(6. ÁBRA)** Roberto Carlos emlékezetes szabadrúgását reprodukáltuk. Majdnem minden paraméter módosítható (távolság, szög, kapuméret, C_s, sebesség, forgás, sorfal helyzete stb.). Az elemzés megmutatja az I. és II. modell kiszámított röppályáját, ezúttal a **4.** és **6. EGYENLET** használatával, mivel henger helyett most labdát vizsgálunk. Kérjük meg a tanulókat, hogy találják meg egy adott elrendezéshez a legjobb értékeket, illetve találják meg azokat a feltételeket, amelyek mellett a modellek különböző röppályákat eredményeznek, és adjanak magyarázatot az eltérésekre. (A modellek akkor fognak eltérést mutatni, ha a labda sebessége alacsony, forgási sebessége pedig magas.)

3 | 3 Szimulációk

2D szimuláció: Néhány kísérletet követően a tanulók szimulálhatják is a Magnus-effektust. Töltsük le a Java-programot [11]. Ebben a szimulációban a tanulók módosíthatják a kezdősebességet, a szöget, a közegellenállási együtthatót és a szögsebes-



6. ÁBRA Szabadrúgás elemzése

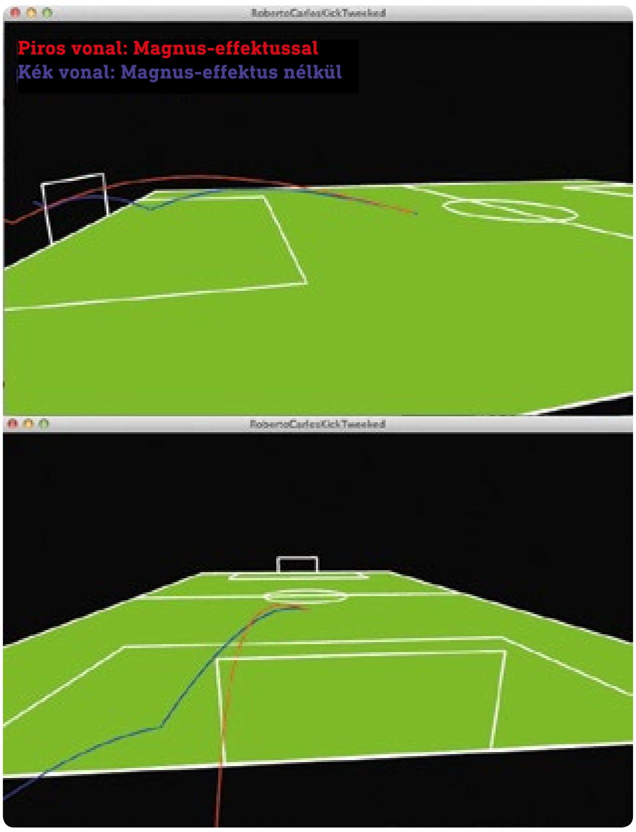


7. ÁBRA 2D szimuláció

séget. A forgásirány és a labdára ható erők az **1. ÁBRA** szerint alakulnak. A **7. ÁBRÁN** három példa látható 30°-os röppályákra: elsőként 0, majd 5 és végül 10 $\frac{rev}{s}$ forgási sebességgel. Látható, hogy az x_{max} és y_{max} értékei a forgási sebesség növekedésével együtt emelkednek.

3D szimuláció: Itt is Roberto Carlos szabadrúgásának röppályáját modelleztük (**8. ÁBRA**). A megfelelő Java-program letöltésével kipróbálható a szimuláció [11]. Később egy másik verzió [11] is kipróbálható a rúgás nélkül, de a paraméterek szabadon módosíthatók, és megvizsgálható a röppályára kifejtett hatásuk.

Három dimenzióban a dolgok jóval összetettebbé válnak. A kétdimenziós modellben a labda csak felső vagy alsó forgásiránnyal rendelkezhet, így a röppálya és a Magnus-erő mindig ugyanazon a síkon hat. A háromdimenziós modellben a Magnus-effektus elhajlítja a labda röppályáját, de a forgás perdülete mindig megőrződik, ezért a labda giroszkópként viselkedik. Így a v és ω közötti szög a röppálya különböző pontjain más és más lesz, ami komplexebbé teszi a labda útját. A GeoGebra számításaitól eltérően ez a program – az előző képkocka értékei alapján – egyszerűen kiszámítja az összes erő numerikus értékét. A program Processing [12] nyelven készült, amely a Java egyszerűsített verziója.



8. ÁBRA 3D szimuláció

4 | KÖVETKEZTETÉS

A focipályán a labda röppályája nagyon összetett, és számos tényezőtől függ. Az osztálytermi tanulmányozás érdekében a tanulóknak modellek és leegyszerűsítések alkalmazásával kezelhető összetevőkre kell lebontaniuk ezt a komplex viselkedést. Ezek a kísérletek, modellek és szimulációk bepillantást engednek abba, hogy mi mindent lehet kikövetkeztetni a tudományos módszer használatával: Ha azt feltételezzük, hogy a játékot víz alatt játsszák, vagy hogy a focilabdát két papírcsészével lehet helyettesíteni, nagyon közel kerülhetünk Roberto Carlo ívelt lövésének pontos magyarázatához.

5 | EGYÜTTMŰKÖDÉSI LEHETŐSÉGEK

Az iStage 3 GeoGebra-platformján [10] részletes információk találhatók a GeoGebra-fájlok letöltéséről és használatáról. Érdemes a tanulókat kihívás elé állítani: próbálják elérni a lehetséges legnagyobb Magnus-effektust a repülő papírcsészék kísérletében. Ez a C_s legmagasabb értékének megtalálását jelenti, amely 1-hez a lehető legközelebb van. Az elemzések, eredmények és modellek másokkal is megoszthatók [11].

REFERENCIÁK

[1] www.theguardian.com/football/2015/may/18/roberto-carloss-free-kick-against-france-recreated-sensible-soccer-style (2016.03.08)

[2] www.uefa.com/trainingground/skills/video/videoid%3D761187.html (2016.03.08)

[3] Az **1. ÁBRA** eredeti képének forrása: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Magnus_effect.svg (2016.03.08)

[4] The Science of Soccer; John Wesson. CRC press, 2002. ISBN 978-0750308137

[5] www.physlets.org/tracker

[6] iStage: IKT oktatási anyagok a természettudományokban, „A biciklitől az űrig”, 45–52. oldal; www.science-on-stage.de/iStage1_downloads

[7] VidAnalysis alkalmazás https://play.google.com/store/apps/details?id=com.vidanalysis.free&hl=en (2016.03.08)

[8] www.geogebra.org/

[9] Hasonló kísérletet ír le Laura Howes (Science in School, 35. szám, 2016, www.scienceinschool.org/content/sports-spin).

[10] www.geogebra.org/science+on+stage

[11] www.science-on-stage.de/iStage3_materials

[12] https://processing.org

IMPRINT

TAKEN FROM

iStage 3 - Football in Science Teaching
available in Czech, English, French, German,
Hungarian, Polish, Spanish, Swedish
www.science-on-stage.eu/istage3

PUBLISHED BY

Science on Stage Deutschland e.V.
Poststraße 4/5
10178 Berlin · Germany

REVISION AND TRANSLATION

TransForm Gesellschaft für Sprachen- und Mediendienste mbH
www.transformcologne.de

CREDITS

The authors have checked all aspects of copyright for the images and texts used in this publication to the best of their knowledge.

DESIGN

WEBERSUPIRAN.berlin

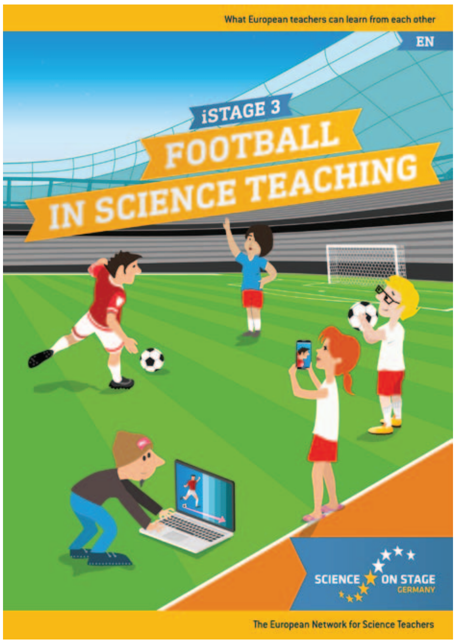
ILLUSTRATION

Tricom Kommunikation und Verlag GmbH
www.tricom-agentur.de

PLEASE ORDER FROM

www.science-on-stage.de
info@science-on-stage.de

First edition published in 2016



SCIENCE ON STAGE – THE EUROPEAN NETWORK FOR SCIENCE TEACHERS

... is a network of and for science, technology, engineering and mathematics (STEM) teachers of all school levels.
... provides a European platform for the exchange of teaching ideas.
... highlights the importance of science and technology in schools and among the public.

The main supporter of Science on Stage is the Federation of German Employers' Associations in the Metal and Electrical Engineering Industries (GESAMTMETALL) with its initiative think ING.

Join in - find your country on
WWW.SCIENCE-ON-STAGE.EU

www.facebook.com/scienceonstageeurope
www.twitter.com/ScienceOnStage

Subscribe for our newsletter:

www.science-on-stage.eu/newsletter

SCIENCE ON STAGE GERMANY

MAIN SUPPORTER OF SCIENCE ON STAGE GERMANY

think ING.

Die Initiative für Ingenieurnachwuchs

Proudly supported by

SAP