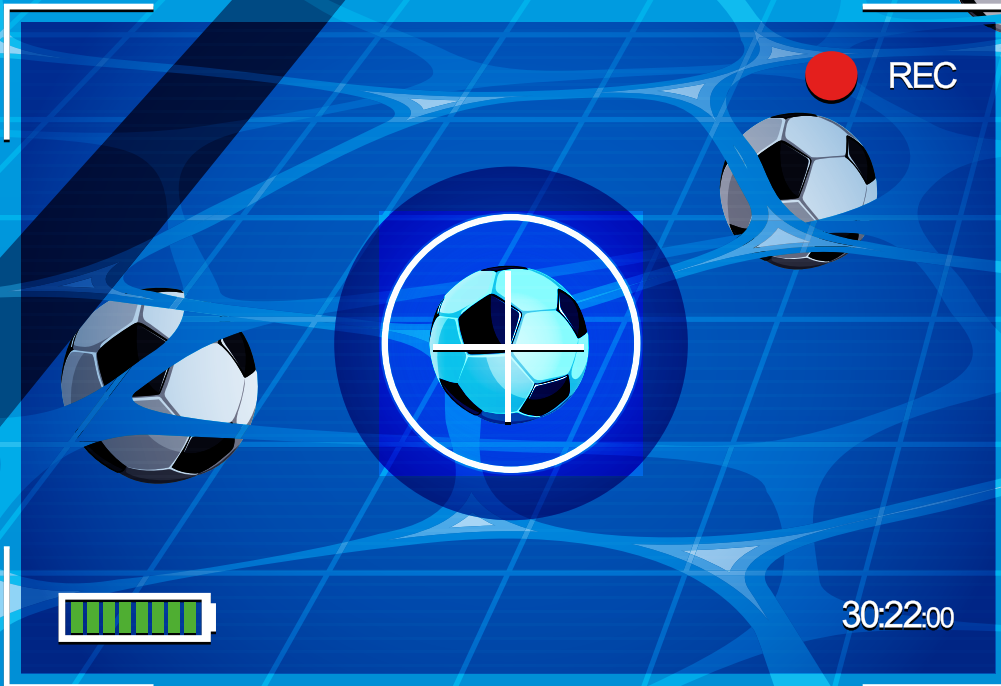


ANDERS FLORÉN · PHILIPPE JEANJACQUOT · DIONYSIS KONSTANTINOU · ANDREAS MEIER · CORINA TOMA · ZBIGNIEW TRZMIEL

BANANENFLANKE



Magnus-Effekt, Strömungsdynamik

Physik, Mathematik

16–19 Jahre

1 | ZUSAMMENFASSUNG

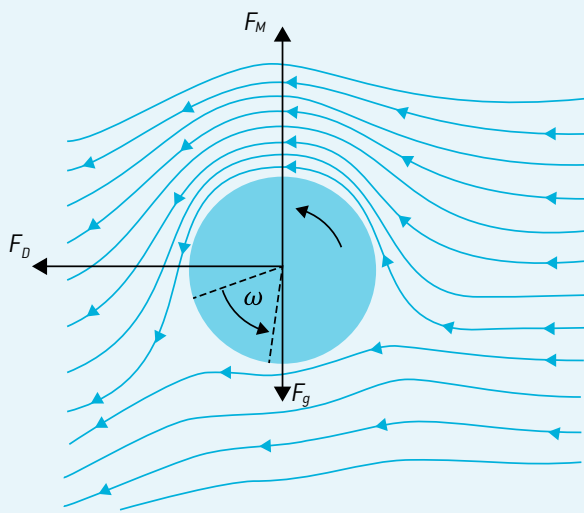
Ein Ball, der rotierend durch die Luft fliegt, ändert seine Richtung aufgrund des Magnus-Effekts, einer Kraft, die senkrecht zur Flugrichtung und Rotationsachse des Balls wirkt. Hier stellen wir einige praktische Experimente sowie Simulationen und Methoden zur Berechnung der Flugbahn vor.

2 | VORSTELLUNG DES KONZEPTS

Im Juni 1997 schoss Roberto Carlos bei einem Freistoß über 35 Meter ein berühmtes Tor, das den Zuschauer nach wie vor sprachlos macht.^[1] Wie kann der Ball sich so verhalten – erst in eine Richtung fliegen und dann wie von Zauberhand eine Kurve in Richtung Tor machen? Die Antwort liegt in der Rotation des Balls in der Luft und im sogenannten Magnus-Effekt. Für eine kostenlose Einführung in das Thema Freistoß von Meister Roberto selbst empfehlen wir sein Video auf der UEFA Training Ground-Website^[2]. Für eine kostenlose Einführung in den Magnus-Effekt einfach nur weiterlesen.

Um die Flugbahn eines Balls zu analysieren, beachten wir drei Kräfte, die auf den Ball einwirken: die Schwerkraft (*gravitation*) F_g , die Magnus-Kraft F_M und den Luftwiderstand (*drag force*) F_D .

ABB. 1 Kräfte^[3]



Das zweite newtonsche Gesetz gibt uns die Schwerkraft vor: $F_g = mg$, wobei m für die Masse des Balls und g für die Gravitationsbeschleunigung steht.

Die Magnus-Kraft F_M entsteht durch Druckunterschiede auf zwei gegenüberliegenden Seiten des Balls. Die Druckveränderung lässt sich mit dem Bernoulli-Effekt beschreiben. Für einen Punkt an der Oberfläche, der sich mit der Geschwindigkeit v durch ein Medium bewegt, ist der Gesamtdruck p gleich dem

umgebenden statischen Druck p_0 plus dem dynamischen Druck q (GL. 1). Dabei steht ρ für die Dichte des Mediums, in unserem Fall Luft. Wenn ein Ball oder Zylinder mit einem Radius R rotiert (mit einer Winkelgeschwindigkeit ω in Radianten pro Sekunde), dann ist ein Punkt an der Oberfläche des Balls einem stärkeren Luftstrom ($v + \omega R$) ausgesetzt als der ihm genau gegenüberliegende Punkt auf der anderen Seite ($v - \omega R$). Somit können wir den Druckunterschied $\Delta p = 2\rho\omega vR$ aus GL. 1 ableiten.

$$p = q + p_0 = \frac{\rho v^2}{2} + p_0 \quad (\text{GL. 1})$$

$$\begin{aligned} \Delta p &= \left(\frac{\rho v_2^2}{2} + p_0 \right) - \left(\frac{\rho v_1^2}{2} + p_0 \right) \\ &= \frac{\rho \{ (v + \omega R)^2 - (v - \omega R)^2 \}}{2} = 2\rho\omega vR \end{aligned}$$

$$F_M = \Delta p A = (2\rho\omega vR)A$$

$$\text{Für einen Zylinder: } F_M = 4\rho\omega vR^2h. \quad (\text{GL. 2})$$

$$\text{Für eine Kugel: } F_M = 2\rho\omega v\pi R^3. \quad (\text{GL. 3})$$

Der auf die Oberfläche wirkende Druck ist F_M . Ohne zu stark in die dahinterstehende Mathematik einzutauchen, brauchen wir nur die Kräfte zu berücksichtigen, die senkrecht zur Luftströmung wirken. Alle Kräfte, die in eine andere Richtung wirken, werden aufgrund von Symmetrie durch gegenüberliegende Kräfte ausgeglichen. Daher berücksichtigen wir nur den Wirkungsquerschnitt A des Objekts. Bei einem Ball ist A einfach nur ein Kreis mit dem Radius R (GL. 3). Bei einem Zylinder ist A ein Rechteck mit der Höhe $2R$ und der Breite h (GL. 2). Als Vektor ist \vec{F}_M proportional zum Kreuzprodukt der Geschwindigkeit und der Winkelgeschwindigkeit.

Zuletzt ist noch der Luftwiderstand F_D zu bestimmen. Das ist nicht so einfach, da der Luftstrom entweder laminar oder turbulent sein kann, was stark von der Form des Objekts und der Beschaffenheit des Mediums abhängt, durch das sich das Objekt bewegt. Für unser Experiment genügt es, anzunehmen, dass der Luftstrom laminar ist (wie in ABB. 1) und die Standardgleichung für den Luftwiderstand zu verwenden, bei der die Kraft direkt entgegen der und linear zur Geschwindigkeit wirkt: $F_D = \beta v$. β ist eine Konstante, die von den Eigenschaften des Mediums und den Maßen des Objekts abhängt. Für einen Fußball in der Luft ist $\beta = 0,142 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$ ^[4].

3 | AUFGABE DER SCHÜLER

Hier stellen wir drei Möglichkeiten vor, den Magnus-Effekt zu demonstrieren. Die Experimente lassen sich als einfache Demonstrationen durchführen, man kann sie aber auch aufzeichnen und die Flugbahnen mit unseren Modellen analysieren. In diesem Fall muss eine stationäre Kamera verwendet werden, die sich auf derselben Höhe wie die Objekte befindet. Zudem muss die Kamera im rechten Winkel zur Flugbahn sein, mit mindestens einigen Metern Abstand, um die Winkelverdrehtung zu minimieren. Die Aufnahme kann dann mit einem Programm zur Bewegungsverfolgung (Motion Tracking) analy-



ABB. 2 Zylinder auf einer schiefen Ebene

siert werden. Wir empfehlen Tracker^[5]. Detaillierte Informationen zur Nutzung von Tracker finden Sie in der Broschüre iStage 1^[6]. Mit VidAnalysis^[7] steht eine hervorragende App zur Verfügung, die die Flugbahn aufzeichnet und die Analyse direkt auf dem Android-Gerät durchführt (ABB. 2C). Die Daten können dann zur weiteren Analyse exportiert werden. Dafür verwenden wir die Freeware GeoGebra^[8].

3 | 1 Zylinderexperimente

Aus A4- oder A3-Blättern werden Zylinder geklebt. Diese werden dann auf einer schiefen Ebene losgelassen, um einen freien Fall mit Rotation zu erhalten (ABB. 2, oberes Bild).

Die Schüler können untersuchen, was passiert, wenn sie die Neigung der schiefen Ebene, den Radius oder die Höhe des Zylinders verändern. Die Schüler können im Experiment die Parameter finden, die sichtbar eine stärkere Auswirkung haben, und diese mit GL. 2 in Verbindung bringen oder aber sie gehen noch einen Schritt weiter, extrahieren die Daten und führen eine Datenanalyse (Modell II) durch, wie sie weiter unten beschrieben ist.

Der Magnus-Effekt in Wasser (ABB. 3) ist aufgrund der hohen Dichte dieses Mediums noch beeindruckender. Der Zylinder muss eine höhere Dichte als Wasser und eine raue Oberfläche haben, um die Reibung zu erhöhen. Wir haben einen massiven Teflonstab mit Klettband an der Oberfläche verwendet. Um das Gewicht des Zylinders anzupassen, kann man Münzen an die Enden kleben.

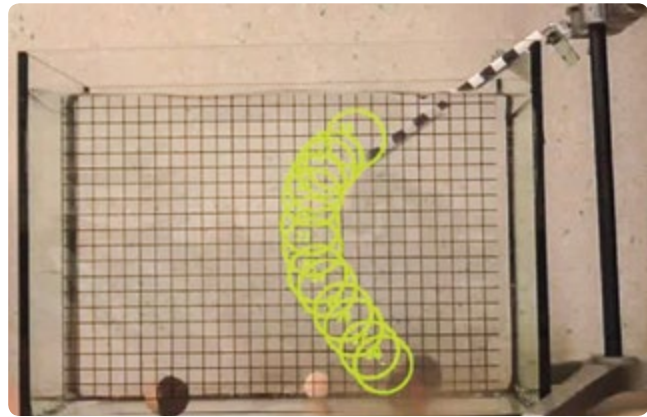


ABB. 3 Der Magnus-Effekt in Wasser

Ein noch spektakulärerer, aber auch schwierigerer Aufbau ist es, zwei Styroporbecher an ihren Böden zusammenzukleben, um so einen in der Mitte engeren Zylinder zu bekommen.^[9] Dann wird eine Schnur um die Mitte gerollt und der Zylinder mit einem Ruck an der Schnur in die Luft geschleudert (ABB. 4 – es gibt auch einen Film auf unserer GeoGebra-Website^[10]). Man braucht etwas Übung, aber das Ergebnis ist spektakulär. Das Experiment ist weniger leicht reproduzierbar als die anderen Zylinderexperimente, da die Flugbahn vom Winkel und der Stärke des Rucks an der Schnur abhängt. Aber man kann die Flugbahnen einzeln analysieren. In ABB. 4 bewegen sich die fliegenden Becher zirkulär. Wenn der Magnus-Effekt deutlich stärker als die Erdanziehungskraft ist, dann verhält sich F_M wie eine Zentripetalkraft. Diese Annahme ist bei der späteren Datenanalyse sehr hilfreich.

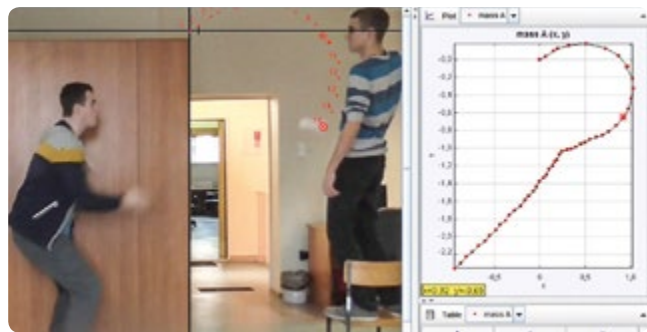


ABB. 4 Fliegende Becher

3 | 2 Datenanalyse

Die verschiedenen mathematischen Modelle zur Analyse der Flugbahnen sind auf unserer iStage3-GeoGebra-Website^[10] online abrufbar. Wir empfehlen, dass Sie sich diese Modelle ansehen, bevor Sie weiterlesen. Die Modelle laufen direkt im Browser.

Bei allen Berechnungen sind wir davon ausgegangen, dass die Rotation während des Flugs konstant bleibt. Dann erstellen wir auf der Basis unterschiedlicher Annahmen zwei vereinfachte Modelle:

Modell I: Wie in der Fragezeichen-Flugbahn der fliegenden Becher (ABB. 4) verhält F_M sich als Zentripetalkraft. Die berechnete

Flugbahn des Objekts ist ein Kreis mit dem Radius r . Diese Annahme eignet sich auch für die Elfmetersituation, in der die Gesamtgeschwindigkeit des Balls grob dieselbe bleibt. Etwas von der Energie geht aber durch Turbulenzen verloren, sodass wir eine Konstante C_s einführen müssen, um diesen Verlust zu berücksichtigen. Damit erhalten wir:

$$F_M = C_s 2 \rho \omega v R A = \frac{mv^2}{r}$$

Für eine Kugel: $r = \frac{mv}{2C_s \pi \rho \omega R^3}$ GL. 4

Für einen Zylinder: $r = \frac{mv}{4C_s \rho \omega h R^2}$ GL. 5

Man sieht die Spur aus **ABB. 4** in unserem GeoGebra-Modell (*flying cups*) und kann hier das Zentrum des Kreises und C_s verändern. Durch Spielen mit den Parametern erhält man die beste Angleichung. Das Modell berechnet r aus **GL. 5**. Für unsere Daten ist die beste Angleichung $C_s = 0,86$.

Modell II: Um die Berechnungen für das Experiment mit dem Papierzylinder (**ABB. 2**) zu vereinfachen, können die Schüler davon ausgehen, dass der Magnus-Effekt vor allem senkrecht zur ursprünglichen Bewegungsrichtung zieht und dass die Zylinder im Fall ihre Maximalgeschwindigkeit erreichen. Unter diesen Voraussetzungen heben sich F_D und F_g auf und der Magnus-Effekt kann als Beschleunigung (*acceleration*) a in y -Richtung gesehen werden, sodass die errechnete Flugbahn eine Parabel beschreibt:

$$y = \frac{a}{2v^2} x^2 \implies y = C_s \frac{\rho \omega R A}{mv} x^2$$

Für eine Kugel: $y = C_s \frac{\pi \rho \omega R^3}{mv} x^2$ GL. 6

Für einen Zylinder: $y = C_s \frac{2 \rho \omega h R^2}{mv} x^2$ GL. 7

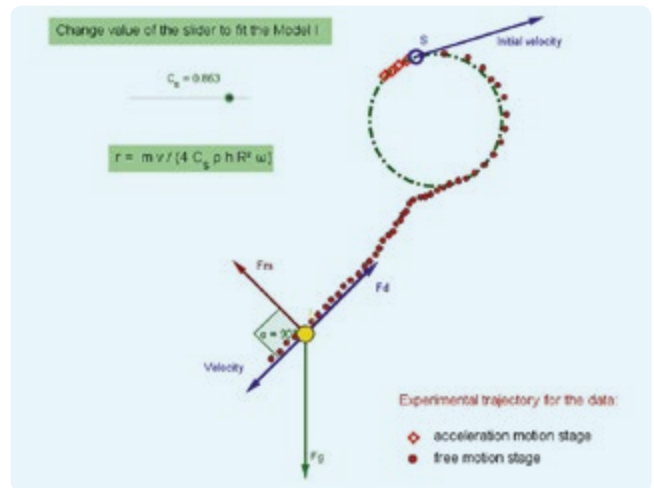


ABB. 5 Analyse der fliegenden Becher

Dies ist nur eine Vereinfachung, wir erhalten daraus aber einen ähnlichen Wert C_s wie in unserem anderen Modell.

Auf unserer GeoGebra-Website (**ABB. 6**) haben wir den berühmten Freistoß von Roberto Carlos nachgestellt. Man kann mit fast allen Parametern spielen, um den Aufbau zu variieren (Abstand, Winkel, Größe des Tors, C_s , Geschwindigkeit, Rotation, Position der Mauer aus vier Mann etc.). Die Analyse zeigt die berechnete Flugbahn der Modelle I und II, diesmal mit Hilfe von **GL. 4** und **GL. 6**, da wir hier einen Ball betrachten und keinen Zylinder. Fordern Sie Ihre Schüler auf, die besten Werte für einen bestimmten Aufbau zu ermitteln oder herauszufinden, unter welchen Bedingungen die Modelle unterschiedliche Flugbahnen ergeben. Fragen Sie die Schüler auch nach einer Erklärung dafür. (Sie werden bemerken, dass die Modelle sich unterscheiden, wenn man von einer sehr geringen Geschwindigkeit und einer starken Rotation des Balls ausgeht).

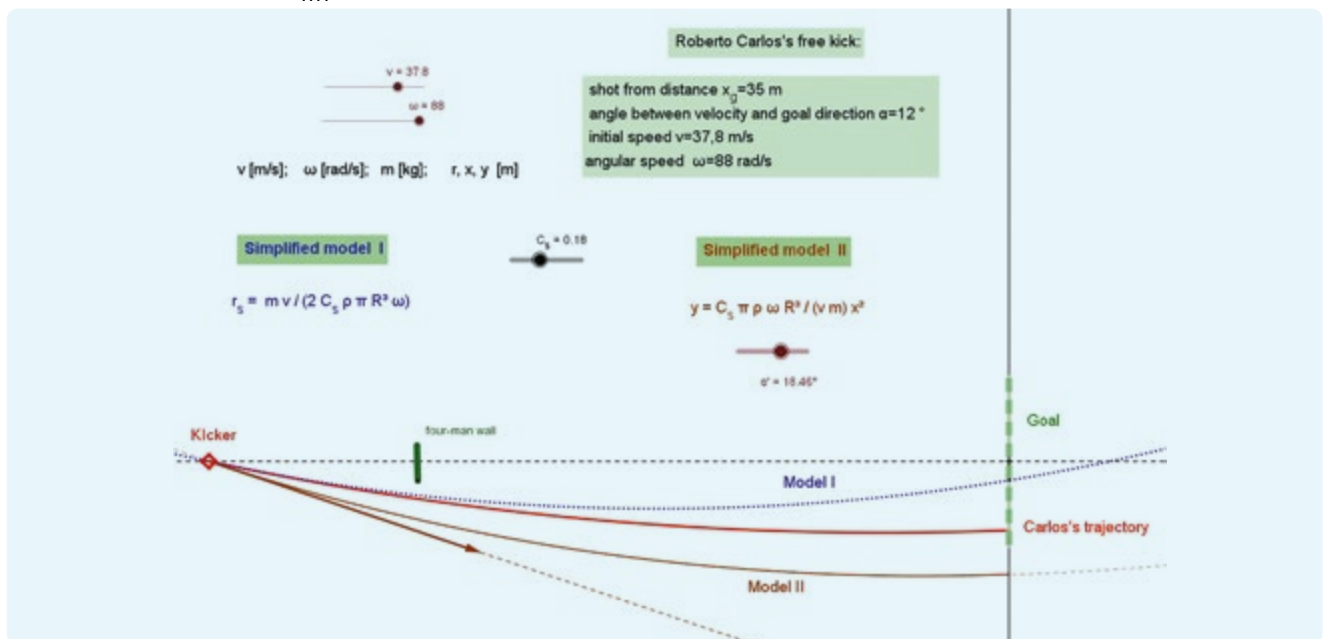


ABB. 6 Freistoßanalyse

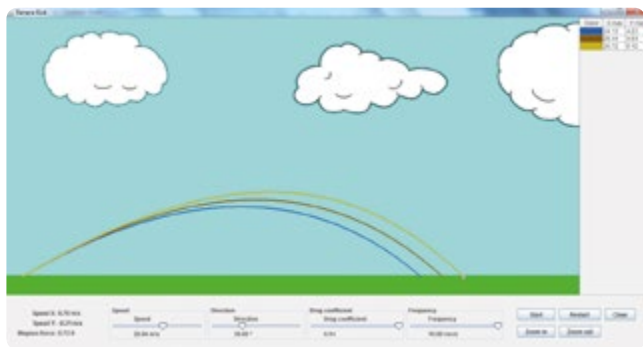


ABB. 7 2D-Simulation

3 | 3 Simulationen

2D-Simulation: Nach einigen praktischen Experimenten können die Schüler den Magnus-Effekt simulieren. Laden Sie das entsprechende Java-Programm herunter^[11]. In der Simulation können die Schüler Anfangsgeschwindigkeit, Winkel, Strömungswiderstandskoeffizienten und Winkelfrequenz verändern. Die Rotationsrichtung und die Kräfte, die auf den Ball wirken, sind in **ABB. 1** dargestellt. In **ABB. 7** zeigen wir drei Beispiele für die Flugbahnen bei 30° mit einer Frequenz von 0, dann 5 und schließlich $10 \frac{\text{rev}}{\text{s}}$ [revolutions per second, Umdrehungen pro Sekunde]. Man sieht, dass die Werte von x_{max} und y_{max} steigen, wenn die Frequenz steigt.

3D-Simulation: Noch einmal haben wir die Flugbahn des Freistoßes von Roberto Carlos nachgestellt (**ABB. 8**). Sie können es selbst ausprobieren, indem Sie das entsprechende Java-Programm^[11] herunterladen. Später können Sie auch eine weitere Version^[11] ohne Bezug auf den Freistoß testen. Dabei können Sie die Parameter frei verändern, um zu sehen, welchen Einfluss diese auf die Flugbahn haben.

In 3D wird alles deutlich komplexer. Im zweidimensionalen Modell kann der Ball nur nach oben oder unten rotieren, sodass die Flugbahn und die Magnus-Kraft stets in derselben Ebene wirken. Im 3D-Modell führt der Magnus-Effekt zu einer Kurve in der Flugbahn des Balls, aber der Drehimpuls der Rotation bleibt erhalten, und der Ball verhält sich wie ein Kreisel. Der Winkel zwischen v und ω ist an verschiedenen Punkten der Flugbahn unterschiedlich, sodass diese komplexer wird. Im Gegensatz zu den GeoGebra-Berechnungen errechnet dieses Programm alle Kräfte in jeder Einstellung numerisch anhand der Werte in der vorherigen Einstellung. Das Programm ist in Processing^[12] geschrieben, einer vereinfachten Version von Java.

4 | FAZIT

Auf dem Spielfeld ist die Flugbahn eines Fußballs komplex und hängt von einer ganzen Reihe Faktoren ab. Um die Flugbahn im Klassenzimmer zu untersuchen, müssen die Schüler sie anhand von Modellen und Vereinfachungen in leicht zu handhabende Einzelkomponenten unterteilen. Diese Experimente, Modelle und Simulationen zeigen auf, was wir aus der Arbeit mit einer wissenschaftlichen Methode schließen können: Wenn wir



ABB. 8 3D-Simulation

annehmen, dass das Spiel unter Wasser gespielt wird oder dass der Fußball durch zwei Becher ersetzt wird, erhalten wir eine ganz gute Annäherung an die Erklärung, wie Roberto Carlos es schafft, den Ball um die Kurve fliegen zu lassen.

5 | OPTION ZUR KOOPERATION

Auf unserer iStage 3-GeoGebra-Plattform^[10] finden Sie Informationen, wie Sie eine Kopie der GeoGebra-Dateien bekommen und wie Sie diese Dateien einsetzen können. Wir schlagen einen Wettbewerb vor: Wer erzielt im Experiment mit den fliegenden Bechern den größtmöglichen Magnus-Effekt? Dies bedeutet, den höchsten Wert für C_s zu finden, möglichst nah an 1. Teilen Sie Ihre Analysen, Ergebnisse und Modelle.^[11]

QUELLEN

- [1] www.theguardian.com/football/2015/may/18/roberto-carloss-free-kick-against-france-recreated-sensible-soccer-style (08.03.2016)
- [2] www.uefa.com/trainingground/skills/video/videoid%3D761187.html (08.03.2016)
- [3] Das Originalbild für **ABB. 1** stammt aus https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Magnus_effect.svg (08.03.2016)
- [4] The Science of Soccer; John Wesson. CRC press, 2002. ISBN 978-0750308137
- [5] www.physlets.org/tracker
- [6] iStage 1 – Unterrichtsmaterialien für IKT in den Naturwissenschaften, Kapitel „Vom Fahrrad zum Weltraum“, S. 45–52; www.science-on-stage.de/istage1-downloads
- [7] VidAnalysis app <https://play.google.com/store/apps/details?id=com.vidanalysis.free&hl=en> (08.03.2016)
- [8] www.geogebra.org/
- [9] Ein ähnliches Experiment wurde beschrieben von Laura Howes (Science in School, Ausgabe 35, 2016, www.scienceinschool.org/content/sports-spin).
- [10] www.geogebra.org/science+on+stage
- [11] www.science-on-stage.de/istage3_Materialien
- [12] <https://processing.org>



IMPRESSUM

ENTNOMMEN AUS

iStage 3 – Fußball im MINT-Unterricht
verfügbar in Deutsch, Englisch, Französisch, Polnisch,
Spanisch, Schwedisch, Tschechisch, Ungarisch
www.science-on-stage.de/istage3

HERAUSGEBER

Science on Stage Deutschland e.V.
Poststraße 4/5
10178 Berlin

REVISION UND ÜBERSETZUNG

TransForm Gesellschaft für Sprachen- und Mediendienste mbH
www.transformcologne.de

TEXT- UND BILDNACHWEISE

Die Autoren haben die Bildrechte für die Verwendung in
dieser Publikation nach bestem Wissen geprüft und sind für
den Inhalt ihrer Texte verantwortlich.

GESTALTUNG

WEBERSUPIRAN.berlin

ILLUSTRATION

Tricom Kommunikation und Verlag GmbH
www.tricom-agentur.de

BESTELLUNGEN

www.science-on-stage.de
info@science-on-stage.de

Zur besseren Lesbarkeit wurde auf die Verwendung der
weiblichen Form verzichtet. Mit der männlichen Form ist
stets auch die weibliche Form gemeint.

Creative-Commons-License: Attribution Non-Commercial
Share Alike



1. Auflage 2016

© Science on Stage Deutschland e.V.



SCIENCE ON STAGE – THE EUROPEAN NETWORK FOR SCIENCE TEACHERS

- ... ist ein Netzwerk von Lehrkräften für Lehrkräfte aller Schularten, die Mathematik, Informatik, Naturwissenschaften und Technik (MINT) unterrichten.
- ... bietet eine Plattform für den europaweiten Austausch anregender Ideen und Konzepte für den Unterricht.
- ... sorgt dafür, dass MINT im schulischen und öffentlichen Rampenlicht steht.

Science on Stage Deutschland e.V. wird maßgeblich gefördert von think ING., der Initiative für den Ingenieur Nachwuchs des Arbeitgeberverbandes GESAMTMETALL.

Machen Sie mit!

WWW.SCIENCE-ON-STAGE.DE

- Newsletter: www.science-on-stage.de/newsletter
- www.facebook.com/scienceonstagedeutschland
- www.twitter.com/SonS_D

Science on Stage Deutschland ist Mitglied in Science on Stage Europe e.V.

WWW.SCIENCE-ON-STAGE.EU

- www.facebook.com/scienceonstageeurope
- www.twitter.com/ScienceOnStage